Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek
Sveučilište u Zagrebu

UVOD U TEORIJU UPRAVLJANJA

Predavanje 06 - Kalmanov filtar

12. siječnja 2024.

Sastavio: Zvonimir Bujanović

LTI SUSTAVI U DISKRETNOM VREMENU

LTI sustavi u diskretnom vremenu

U mnogim primjenama, dinamika sustava se odvija u diskretnom vremenu.

- ekonomija $\rightsquigarrow$ cijena goriva/tečaj na dnevnoj/tjednoj bazi;
- digitalni sustavi $\rightsquigarrow$ stanja se mijenja iz takta u takt procesora;
- digitalizacija kontinuiranih procesa $\rightsquigarrow$ lsim; digitalni zapis slike/zvuka.

Definicija (LTI sustav u diskretnom vremenu)

Za zadane matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$, te za zadani ulaz $u_0, u_1, \ldots$, formulama

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad x_0 \text{ zadan}$$
$$y_k = Cx_k + Du_k.$$

za $k = 0, 1, 2, \ldots$ opisan je LTI SUSTAV U DISKRETNOM VREMENU*, zapisan u* PROSTORU STANJA.
Niz $(x_k)_k$ zovemo STANJA SUSTAVA*, a $(y_k)_k$ zovemo* IZLAZ SUSTAVA.

Teorija ovih sustava je posve analogna kontinuiranom slučaju, kao i pojmovi koji se pojavljuju, no karakterizacije svojstava su tipično nešto drugačije.

LTI sustavi u diskretnom vremenu

U control toolboxu:

```
# Diskretni LTI sustav.
# dt je vremenska razlika između susjednih koraka (realan broj).
sys_t = ss(A, B, C, D, dt);

# Slučajno generirani stabilni diskretni LTI sustav.
sys_t = drss(n, p, m);
```

Teorem

Stanja i izlazi diskretnog LTI sustava su dani sa:

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u_i,$$

$$y_k = C A^k x_0 + \left(\sum_{i=0}^{k-1} C A^{k-1-i} B u_i\right) + D u_k.$$

Dohvatljivost, upravljivost, osmotrivost

Definicija

Stanje $\tilde{x}$ je DOHVATLJIVO *ako, uz $x_0 = 0$, postoji $k \in \mathbb{N}$ i niz $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$ takvi da $x_k = \tilde{x}$.*
LTI sustav, odnosno, par (A, B) je UPRAVLJIV *ako je $\tilde{x}$ dohvatljivo za svaki $x \in \mathbb{R}^n$.*

Sustav je OSMOTRIV *ako postoji k takav da, na temelju $u_0, \ldots, u_{k-1}, y_0, \ldots, y_k$ možemo jednoznačno odrediti x_0.*

Teorem

Par (A, B) je upravljiv ako i samo ako $\operatorname{rank} C(A, B) = n$*, gdje je*
$C(A, B) = [B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \ldots \;\; A^{n-1}B]$ MATRICA UPRAVLJIVOSTI.

Par (C, A) je osmotriv ako i samo ako je $\operatorname{rank} O(C, A) = n$*, gdje je* $O(C, A) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$

MATRICA OSMOTRIVOSTI.

Uočimo da je za osmotrivost ponovno dovoljno promatrati samo autonomni sustav

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k, \\ y_k &= Cx_k. \end{aligned}$$

Dohvatljivost, upravljivost, osmotrivost

Teorem (PBH test)

Diskretni LTI sustav je

- *upravljiv akko* $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A-\lambda I & B \end{bmatrix} = n$*, za sve* $\lambda \in \mathbb{C}$*.*
- *osmotriv akko* $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A-\lambda I \\ C \end{bmatrix} = n$*, za sve* $\lambda \in \mathbb{C}$*.*

Teorem

1. *Neka je* $\dim \mathcal{C}(A,B) = r$*, gdje je* $\mathcal{C}(A,B) = \operatorname{Im} C(A,B)$*. Tada postoji* T *takva da* $\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}$, $\tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$*, gdje je* $\tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $\tilde{B}_1 \in \mathbb{R}^{r\times m}$*, te* $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$ *je upravljiv.*
   $\rightsquigarrow$ FORMA UPRAVLJIVOSTI.

2. *Neka je* $\operatorname{rank} O(C,A) = r$*. Tada postoji* T *takva da* $\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}$, $\tilde{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \end{bmatrix}$*, gdje je* $\tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $\tilde{C}_1 \in \mathbb{R}^{p\times r}$*, te* $(\tilde{C}_1, \tilde{A}_{11})$ *je osmotriv.*
   $\rightsquigarrow$ FORMA OSMOTRIVOSTI.

Stabilnost

Definicija

Za diskretni LTI sustav promotrimo pridruženi autonomni sustav

$$x_{k+1} = Ax_k,$$

tj. pretpostavimo $u_k = 0$ *za* $k \in \mathbb{N}_0$*. Sustav je* INTERNO STABILAN *ako za sve* x_0 *vrijedi* $x_k \xrightarrow{k} 0$*.*

Teorem

Diskretni LTI sustav je interno stabilan ako i samo ako sve svojstvene vrijednosti od A *leže u unutrašnjosti jedinične kružnice u* $\mathbb{C}$*.*

Matrice A čiji spektar leži u unutrašnjosti jedinične kružnice zovemo DISKRETNO STABILNE ili D-STABILNE.

Stabilnost

Teorem

Neka je $M > 0$. Tada je A d-stabilna ako i samo ako jednadžba

$$AXA^T - X + M = 0$$

ima jedinstveno rješenje X i ako za njega vrijedi $X > 0$.

Gornju jednadžbu zovemo STEINOVA ili DISKRETNA LYAPUNOVLJEVA jednadžba.
Eksplicitno rješenje:

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} A^k M (A^T)^k.$$

Python:

```
X = dlyap(A, M);
```

Gramijani

Definicija

Neka je A d-stabilna matrica.
$P_D = \sum_{k=0}^{\infty} A^k BB^T (A^T)^k$ *zovemo* DISKRETNI GRAMIJAN UPRAVLJIVOSTI.
$Q_D = \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k C^T C A^k$ *zovemo* DISKRETNI GRAMIJAN OSMOTRIVOSTI.

Teorem

Neka je A d-stabilna matrica.

1. *P_D je rješenje Steinove jednadžbe $AXA^T - X + BB^T = 0$.*
   Vrijedi: $P_D > 0$ ako i samo ako je (A, B) upravljiv.

2. *Q_D je rješenje Steinove jednadžbe $A^T XA - X + C^T C = 0$.*
   Vrijedi: $Q_D > 0$ ako i samo ako je (C, A) osmotriv.

Frekvencijska domena

Ulogu Fourierove transformacije preuzima tzv. Z-transformacija.

- Niz $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ preslikava se u $\hat{u} = Z(u)$.
- $\hat{u} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je dan formulom

$$\hat{u}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k z^{-k}.$$

- Inverzna Z-transformacija je dana formulom

$$u_k = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \hat{u}(z) z^{k-1} dz,$$

  gdje je Γ zatvorena kontura oko ishodišta.

Teorem

Za diskretni LTI sustav vrijedi: $\hat{y}(z) = \hat{G}(z)\hat{u}(z)$.
Ovdje je $\hat{G}(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$ FUNKCIJA TRANSFERA.

Za diskretne sustave, “frekvencijski odziv” za frekvenciju ω odgovara funkciji transfera izračunatoj u točki $z = e^{i\omega T}$ na jediničnoj kružnici. T=vremenski korak diskretizacije.

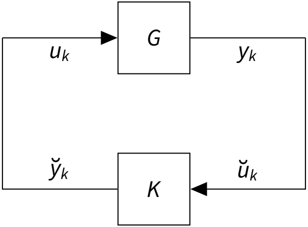
Python:

```
f = evalfr(sys_t, z);  # Vraća funkciju transfera izračunatu u točki z.
H = tf(broj, naz, dt); # Zadavanje LTI pomoću funkcije transfera.
```

Sustav zatvorene petlje - Feedback kontrola

Cilj kontrole sustavom zatvorene petlje:

- Odrediti K takav da je spoj G i K interno stabilan (uz eventualnu optimizaciju).



- Sustav G:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k; \\ y_k &= Cx_k + Du_k. \end{aligned}$$

- Kontroler K:

$$\begin{aligned} \breve{x}_{k+1} &= \breve{A}\breve{x}_k + \breve{B}\breve{u}_k, \\ \breve{y}_k &= \breve{C}\breve{x}_k + \breve{D}\breve{u}_k. \end{aligned}$$

Statički state feedback:

- $y_k = x_k = \breve{u}_k$,
- $\breve{y}_k = u_k = Kx_k \rightsquigarrow \breve{A} = 0, \breve{B} = 0, \breve{C} = 0, K = \breve{D}$.

Spoj GK:

- $x_{k+1} = (A + BK)x_k$
- Cilj: $A + BK$ je d-stabilna.

Stabilizabilnost, opazivost

Definicija

Par (A, B) je **D-STABILIZABILAN** *ako postoji K takva da je $A + BK$ d-stabilna matrica.*
Par (C, A) je **D-OPAZIV** *ako postoji L takva da je $A + LC$ d-stabilna matrica.*

Teorem

Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

1. *Par (A, B) je d-stabilizabilan.*
2. *Za sve $\lambda \in \mathbb{C}$ vrijedi: $|\lambda| \geq 1 \implies \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix} = n$.*
3. *Ako je λ svojstvena vrijednost od A, $|\lambda| \geq 1$, a x lijevi svojstveni vektor za λ, onda $x^* B \neq 0$.*

Slično, par (C, A) je d-opaziv ako i samo ako za sve $\lambda \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$|\lambda| \geq 1 \implies \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = n.$$

Diskretni LQR problem

Diskretni LQR problem:

- Odrediti $u_{\min}$ koji minimizira $J(u) = \sum_{k=0}^{\infty}(x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k)$ za zadane matrice Q, R, te $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$.

Teorem

Neka je (A, B) d-stabilizabilan i (Q, A) d-opaziv.
Rješenje diskretnog LQR problema je dano sa $u_k = Kx_k$, gdje je

$$K = -(R + B^T XB)^{-1} B^T XA,$$

a X je jedinstveno poz. semidefinitno rješenje DISKRETNE RICCATIJEVE JEDNADŽBE

$$A^T XA - X + Q - A^T XB(R + B^T XB)^{-1} B^T XA = 0.$$

Sustav zatvorene petlje

$$x_{k+1} = (A + BK)x_k$$

je d-stabilan, a $J(u_{\min}) = x_0^T X x_0$.

Python:

```
# Vraća -K iz gornjeg teorema, tj. A-BK je d-stabilan.
[X, Lam, K] = dare(A, B, Q, R);
```

DISKRETNI KALMANOV FILTAR

Motivacija

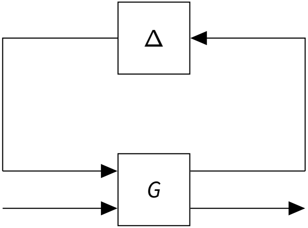
Nedostatak LQR:

- moramo imati pristup svim stanjima ($y = x$);
- jedno rješenje: dodati promatrač koji će napraviti aproksimaciju.

Općeniti problemi kod implementacije kontrolera:

- greške u modeliranju sustava, vanjske smetnje u inputu;
- greške u mjerenju outputa y.

Pristupi koji uzimaju gore navedene greške u obzir:

1. 

   Izdvojimo sve greške u podsustav Δ; sada pretpostavljamo da je modelirani sustav G savršen.

   - cilj: dodati kontroler koji stabilizira G_Δ za sve "malene" Δ.
   - obično se gleda $\mathcal{H}_\infty$-norma $\rightsquigarrow$ problem $\mathcal{H}_\infty$ sinteze.

2. Stohastički model

   - greške i smetnje se dodaju u jednadžbe kao slučajne varijable;
   - stanja sustava postaju također slučajne varijable.

Stohastički diskretni LTI sustav

Pristup 1 $\rightsquigarrow$ 2. semestar
Pristup 2 $\rightsquigarrow$ Kalmanov filtar

Sustav koji opisuje stanja je stohastički:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Fw_k, \quad F \in \mathbb{R}^{n \times n_w}, \; w_k \in \mathbb{R}^{n_w}.$$

Ovdje:

- w_k je slučajna varijabla (šum);
- opisuje npr. vanjsku smetnju i ostale elemente na koje nemamo utjecaj;
- pretpostavit ćemo da ima normalnu distribuciju.

Uz ove pretpostavke će Kalmanov filtar dati optimalnu aproksimaciju stanja.

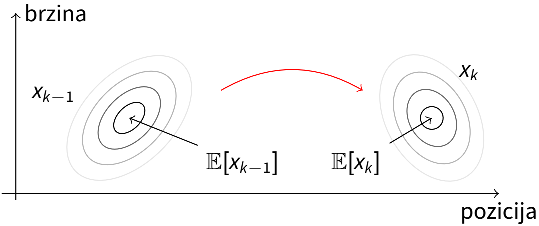
- Ako w_k nije normalna $\rightsquigarrow$ daje najbolju linearnu aproksimaciju.

Pretpostavljamo samo slučaj “bijelog šuma”:

- w_k je nezavisna od $w_0, w_1, \ldots, w_{k-1}$.
- w_k je nezavisna od x_0.

Stohastički diskretni LTI sustav

Sada je i stanje x_k također slučajna varijabla!



$$x_k = \begin{bmatrix} \text{pozicija}_k \\ \text{brzina}_k \end{bmatrix}$$

Iz jednadžbe stohastičkog LTI sustava:

- Ako znamo distribuciju od w_k, možemo ju odrediti i za x_k.
- Uz bijeli šum w_k, ovo je Markovljev proces:

$$\mathbb{P}\left\{x_{k+1} \mid x_0, x_1, \ldots, x_k\right\} = \mathbb{P}\left\{x_{k+1} \mid x_k\right\}.$$

Multivarijatna normalna razdioba

Definicija

Slučajni vektor $x = [x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ *ima* MULTIVARIJATNU NORMALNU RAZDIOBU *ako postoji slučajni vektor* $z \in \mathbb{R}^\ell$*, matrica* $A \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$*, te vektor* $\mu \in \mathbb{R}^n$ *takva da*

$$x = Az + \mu,$$

gdje je $z = [z_1,\ z_2,\ \dots,\ z_\ell]^T$*, te* $z_j \sim \mathcal{N}(0,1)$ *nezavisne slučajne varijable.*

Pišemo $x \in \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$*, gdje je* $\Sigma = AA^T$*.*

Vrijedi:

- $\mathbb{E}[x] = \mu \rightsquigarrow$ očekivanje;
- $\mathbb{E}[(x-\mu)(x-\mu)^T] = \mathbb{E}\left[[(x_i-\mu_i)(x_j-\mu_j)]_{ij}\right] = \Sigma \rightsquigarrow$ kovarijacijska matrica.

Propozicija

Neka je dan stohastički diskretni LTI sustav takav da slučajne varijable x_0 *i* w_k *imaju multivarijatnu normalnu razdiobu, za svaki* $k \in \mathbb{N}_0$ *.*
Tada slučajna varijabla x_k *također ima multivarijatnu normalnu razdiobu, za svaki* $k \in \mathbb{N}$*.*

Problem filtriranja

Dodatno, uz jednadžbu LTI sustava imamo mjerenja (output) koja daju informacije o sustavu. Mjerenja (senzori) mogu biti nepouzdani.

Scenario koji nas zanima:

- Sustav se u trenutku k ($k = 0, 1, \ldots$) nalazi u nepoznatom stanju x_k^{true}.
- Imamo samo indikaciju (dobru ili ne) o vjerojatnosnoj razdiobi tog stanja: $x_k \sim \mathcal{N}(\mu_k, \Sigma_k)$.
- Vjerojatnosni model sustava je:
$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Fw_k, & w_k &\sim \mathcal{N}(0, \Sigma_w), \quad \Sigma_w = \mathbb{E}[w_k w_k^T], \\ y_{k+1} &= Cx_{k+1} + Du_{k+1} + v_{k+1}, & v_{k+1} &\sim \mathcal{N}(0, \Sigma_v), \; \Sigma_v = \mathbb{E}[v_{k+1} v_{k+1}^T]. \end{aligned}$$
  Ovdje slučajna varijabla v_{k+1} modelira nepouzdanost senzora.
- U trenutku $k+1$ imamo stvarno očitanje senzora (mjerenje) y_{k+1}^{true}, nastalo na temelju stvarnog trenutnog stanja sustava x_{k+1}^{true}.

Sada imamo dvije potencijalno konfliktne vrijednosti za y_{k+1}:

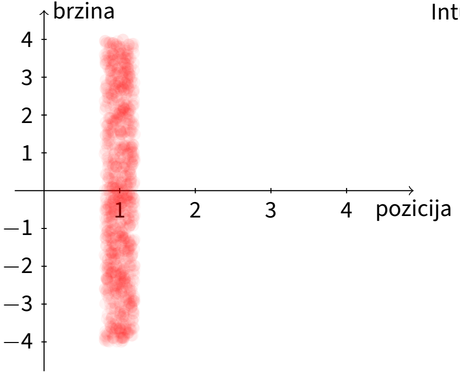
1. Naš model za izlaz stohastičkog LTI sustava očekuje $\mathbb{E}[y_{k+1}]$.
2. Stvarno očitanje senzora je y_{k+1}^{true}.

Problem filtriranja

Zadatak:

- Na temelju mjerenja y_{k+1}^{true} prilagoditi parametre distribucije slučajne varijable x_{k+1}.
- Drugim riječima, zanima nas sljedeća funkcija gustoće:

$$f(x_{k+1} \mid y_0 = y_0^{\text{true}}, y_1 = y_1^{\text{true}}, \ldots, y_{k+1} = y_{k+1}^{\text{true}}).$$



Intuicija:

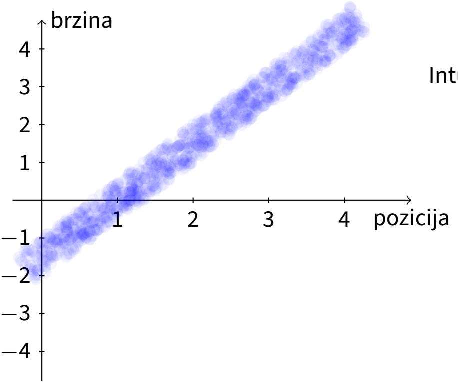
- Imamo automobil koji se giba konstantnom brzinom.
- $x_k = \begin{bmatrix} \text{pozicija}_k \\ \text{brzina}_k \end{bmatrix}$
- Imamo GPS koji mjeri samo poziciju (neprecizno): $y_k^{\text{true}} = \text{pozicija}_k^{\text{true}} + v_k$.
- U trenutku 0 imamo samo y_0^{true}, pa brzina može biti bilo što.
- Slika prikazuje moguću distribuciju stanja x_0 (crveno).

Problem filtriranja

Zadatak:

- Na temelju mjerenja y_{k+1}^{true} prilagoditi parametre distribucije slučajne varijable x_{k+1}.
- Drugim riječima, zanima nas sljedeća funkcija gustoće:

$$f(x_{k+1} \mid y_0 = y_0^{\text{true}}, y_1 = y_1^{\text{true}}, \dots, y_{k+1} = y_{k+1}^{\text{true}}).$$



Intuicija:

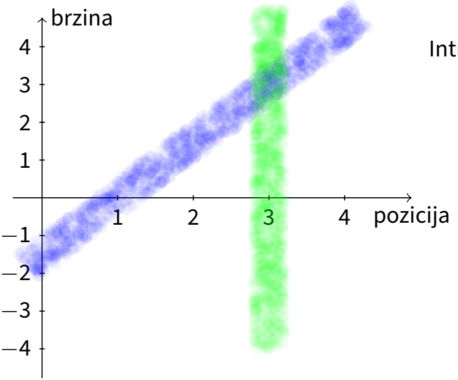
- Pomoću modela (konstantna brzina) u idućem koraku imamo:
$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} \text{pozicija}_k + dt \cdot \text{brzina}_k \\ \text{brzina}_k \end{bmatrix} + w_{k+1}.$$
- Na temelju modela možemo izračunati distribuciju stanja x_{k+1}.
- Slika prikazuje moguću distribuciju stanja x_1 (plavo).

Problem filtriranja

Zadatak:

- Na temelju mjerenja y_{k+1}^{true} prilagoditi parametre distribucije slučajne varijable x_{k+1}.
- Drugim riječima, zanima nas sljedeća funkcija gustoće:

$$f(x_{k+1} \mid y_0 = y_0^{\text{true}}, y_1 = y_1^{\text{true}}, \ldots, y_{k+1} = y_{k+1}^{\text{true}}).$$



Intuicija:

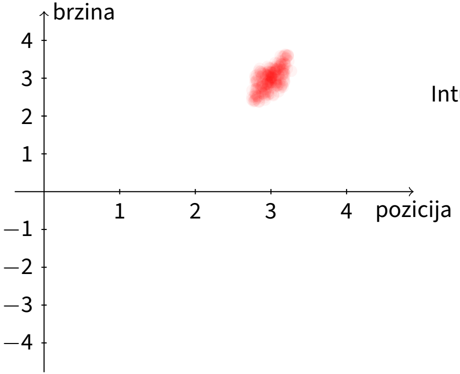
- No u trenutku 1 imamo novo (nepouzdano) mjerenje y_1^{true}.
- Slika prikazuje:
  - moguću distribuciju stanja x_1 dobivenu pomoću modela (plavo);
  - moguću distribuciju stanja x_1 temeljem mjerenja (zeleno).
- Nakon mjerenja vidimo da se stanje x_1 nalazi u presjeku plavog i zelenog!

Problem filtriranja

Zadatak:

- Na temelju mjerenja y_{k+1}^{true} prilagoditi parametre distribucije slučajne varijable x_{k+1}.
- Drugim riječima, zanima nas sljedeća funkcija gustoće:

$$f(x_{k+1} \mid y_0 = y_0^{\text{true}}, y_1 = y_1^{\text{true}}, \ldots, y_{k+1} = y_{k+1}^{\text{true}}).$$



Intuicija:

- Uzimajući u obzir i stanje dobiveno modelom i mjerenje, možemo dobiti puno bolju informaciju o mogućoj distribuciji stanja!
- Slika prikazuje distribuciju $f(x_1 | y_0 = y_0^{\text{true}}, y_1 = y_1^{\text{true}})$ (crveno).

Izvod Kalmanovog filtra

Cilj:

- Odrediti PDF $f(x_{k+1} \mid y_0 = y_0^{\text{true}}, y_1 = y_1^{\text{true}}, \ldots, y_{k+1} = y_{k+1}^{\text{true}})$.
- Pokazuje se da je to ponovno multivarijatna normalna razdioba (bez dokaza)!
- Sa $x_k \sim \mathcal{N}(\mu_k, \Sigma_k)$ označimo sluč. varijablu s tom razdiobom koraku k.
- Sada moramo odrediti parametre μ_{k+1}, Σ_{k+1} za $x_{k+1} \sim \mathcal{N}(\mu_{k+1}, \Sigma_{k+1})$.

1. Predikcija: što jednadžbe sustava daju za stanje u idućem koraku?
Stavimo:

$$\tilde{x}_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Fw_k, \quad \tilde{x}_{k+1} \sim \mathcal{N}(\tilde{\mu}_{k+1}, \tilde{\Sigma}_{k+1}), \quad \tilde{\mu}_{k+1}, \tilde{\Sigma}_{k+1} = ?$$

Zasad ne uzimamo mjerenje y_{k+1}^{true} u obzir.

Očekivanje:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}_{k+1} &= \mathbb{E}[Ax_k + Bu_k + Fw_k] = \mathbb{E}[Ax_k] + \mathbb{E}[Bu_k] + \mathbb{E}[Fw_k] \\
&= A\mathbb{E}[x_k] + Bu_k + F\mathbb{E}[w_k] \\
&= A\mu_k + Bu_k.
\end{aligned}$$

Izvod Kalmanovog filtra

1. Predikcija: što jednadžbe sustava daju za stanje u idućem koraku?
$$\tilde{x}_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Fw_k, \quad \tilde{x}_{k+1} \sim \mathcal{N}(\tilde{\mu}_{k+1}, \tilde{\Sigma}_{k+1}), \quad \tilde{\mu}_{k+1}, \tilde{\Sigma}_{k+1} = ?$$
Zasad ne uzimamo mjerenje y_{k+1}^{true} u obzir.

Očekivanje: $\tilde{\mu}_{k+1} = A\mu_k + Bu_k$.

Uvedimo odstupanje:
$$\tilde{e}_{k+1} := \tilde{x}_{k+1} - \tilde{\mu}_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Fw_k - A\mu_k - Bu_k = Ae_k + Fw_k,$$
gdje je $e_k = x_k - \mu_k$.

Matrica kovarijacije:
$$\begin{aligned}
\tilde{\Sigma}_{k+1} &= \mathbb{E}[(\tilde{x}_{k+1} - \tilde{\mu}_{k+1})(\tilde{x}_{k+1} - \tilde{\mu}_{k+1})^T] = \mathbb{E}[\tilde{e}_{k+1}\tilde{e}_{k+1}^T] \\
&= \mathbb{E}[(Ae_k + Fw_k)(Ae_k + Fw_k)^T] \\
&= \mathbb{E}[Ae_ke_k^TA^T + Fw_ke_k^TA^T + Ae_kw_k^TF^T + Fw_kw_k^TF^T] \\
&= A\mathbb{E}[e_ke_k^T]A^T + F\mathbb{E}[w_ke_k^T]A^T + A\mathbb{E}[e_kw_k^T]F^T + F\mathbb{E}[w_kw_k^T]F^T \\
&= \left[w_k, e_k \text{ nezavisne } \Rightarrow \mathbb{E}[w_ke_k^T] = \mathbb{E}[w_k]\mathbb{E}[e_k^T] = 0\right] \\
&= A\Sigma_kA^T + F\Sigma_wF^T.
\end{aligned}$$

2. Procjena mjerenja: što jednadžbe sustava daju za izlaz u idućem koraku?

$$\tilde{y}_{k+1} = C\tilde{x}_{k+1} + Du_{k+1} + v_{k+1}, \quad \tilde{y}_{k+1} \sim \mathcal{N}(\tilde{\mu}^Y_{k+1}, \tilde{\Sigma}^Y_{k+1}), \quad \tilde{\mu}^Y_{k+1}, \tilde{\Sigma}^Y_{k+1} = ?$$

Zasad ne uzimamo mjerenje y^{true}_{k+1} u obzir.

Očekivanje:

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}^Y_{k+1} &= \mathbb{E}[\tilde{y}_{k+1}] = \mathbb{E}[C\tilde{x}_{k+1} + Du_{k+1} + v_{k+1}] = C\mathbb{E}[\tilde{x}_{k+1}] + Du_{k+1} + \mathbb{E}[v_{k+1}] \\ &= C\tilde{\mu}_{k+1} + Du_{k+1}.\end{aligned}$$

Uvedimo odstupanje:

$$\tilde{e}^Y_{k+1} = \tilde{y}_{k+1} - \tilde{\mu}^Y_{k+1} = C(\tilde{x}_{k+1} - \tilde{\mu}_{k+1}) + v_{k+1} = C\tilde{e}_{k+1} + v_{k+1}.$$

Matrica kovarijacije:

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}^Y_{k+1} &= \mathbb{E}[\tilde{e}^Y_{k+1}(\tilde{e}^Y_{k+1})^T] = \mathbb{E}[(C\tilde{e}_{k+1} + v_{k+1})(C\tilde{e}_{k+1} + v_{k+1})^T] \\ &= [\tilde{e}_{k+1}, v_{k+1} \text{ nezavisne}] \\ &= C\mathbb{E}[\tilde{e}_{k+1}\tilde{e}^T_{k+1}]C^T + \mathbb{E}[v_{k+1}v^T_{k+1}] \\ &= C\tilde{\Sigma}_{k+1}C^T + \Sigma_v.\end{aligned}$$

3. Filtriranje
   - Sada tražimo razdiobu za x_{k+1} koja uzima u obzir i ono što daje model sustava $(\tilde{x}_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})$ i ono što daje mjerenje y_{k+1}^{true}, tj. uvjet $\tilde{y}_{k+1} = y_{k+1}^{\text{true}}$.
   - Ranije smo spomenuli da će tražena razdioba biti normalna: $x_{k+1} \sim \mathcal{N}(\mu_{k+1}, \Sigma_{k+1})$.
   - Vrijedi:
     $$x_{k+1} = \tilde{x}_{k+1} + \underbrace{K_{k+1}(y_{k+1}^{\text{true}} - \tilde{y}_{k+1})}_{\text{korekcija}} .$$
     Ovdje je K_{k+1} tzv. Kalmanov gain. Određujemo ga iz uvjeta
     $$\mathbb{E}[\|x_{k+1} - \mu_{k+1}\|^2] \to \min .$$
     To daje optimalni estimator stanja uz naše pretpostavke (Gaussov šum).
   - Ako w_k, v_k nisu Gaussove, ova procedura daje tzv. najbolji linearni estimator za x_{k+1}.

Izvod Kalmanovog filtra

3. Filtriranje: $x_{k+1} = \tilde{x}_{k+1} + K_{k+1}(y_{k+1}^{\text{true}} - \tilde{y}_{k+1}), \quad \mathbb{E}[\|x_{k+1} - \mu_{k+1}\|^2] \to \min.$

Očekivanje:

$$\begin{aligned}
\mu_{k+1} &= \mathbb{E}[x_{k+1}] \\
&= \mathbb{E}[\tilde{x}_{k+1} + K_{k+1}(y_{k+1}^{\text{true}} - \tilde{y}_{k+1})] \\
&= \tilde{\mu}_{k+1} + K_{k+1}(y_{k+1}^{\text{true}} - \mathbb{E}[\tilde{y}_{k+1}]) \\
&= \tilde{\mu}_{k+1} + K_{k+1}(y_{k+1}^{\text{true}} - \tilde{\mu}_{k+1}^{Y}) \\
&= \tilde{\mu}_{k+1} + K_{k+1} e_{k+1}^{Y},
\end{aligned}$$

gdje je $e_{k+1}^{Y} = y_{k+1}^{\text{true}} - \tilde{\mu}_{k+1}^{Y}$.

Odstupanje:

$$\begin{aligned}
e_{k+1} &:= x_{k+1} - \mu_{k+1} \\
&= \tilde{x}_{k+1} + K_{k+1}(y_{k+1}^{\text{true}} - \tilde{y}_{k+1}) - \tilde{\mu}_{k+1} - K_{k+1}(y_{k+1}^{\text{true}} - \tilde{\mu}_{k+1}^{Y}) \\
&= \tilde{x}_{k+1} - K_{k+1}\tilde{y}_{k+1} - \tilde{\mu}_{k+1} + K_{k+1}\tilde{\mu}_{k+1}^{Y} \\
&= \tilde{e}_{k+1} - K_{k+1}\tilde{e}_{k+1}^{Y} \\
&= \tilde{e}_{k+1} - K_{k+1}(C\tilde{e}_{k+1} + v_{k+1}) \\
&= (I - K_{k+1}C)\tilde{e}_{k+1} - K_{k+1}v_{k+1}.
\end{aligned}$$

3. Filtriranje: $x_{k+1} = \tilde{x}_{k+1} + K_{k+1}(y^{\text{true}}_{k+1} - \tilde{y}_{k+1}), \quad \mathbb{E}[\|x_{k+1} - \mu_{k+1}\|^2] \to \min.$

Očekivanje: $\mu_{k+1} = \tilde{\mu}_{k+1} + K_{k+1} e^{y}_{k+1}.$

Odstupanje: $e_{k+1} = (I - K_{k+1}C)\tilde{e}_{k+1} - K_{k+1}v_{k+1}.$

Matrica kovarijacije:

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{k+1} &= \mathbb{E}[e_{k+1}e^T_{k+1}] \\
&= \mathbb{E}[((I - K_{k+1}C)\tilde{e}_{k+1} - K_{k+1}v_{k+1})((I - K_{k+1}C)\tilde{e}_{k+1} - K_{k+1}v_{k+1})^T] \\
&= [\tilde{e}_{k+1}, v_{k+1} \text{ nezavisne}] \\
&= (I - K_{k+1}C)\mathbb{E}[\tilde{e}_{k+1}\tilde{e}^T_{k+1}](I - K_{k+1}C)^T + K_{k+1}\mathbb{E}[v_{k+1}v^T_{k+1}]K^T_{k+1} \\
&= (I - K_{k+1}C)\tilde{\Sigma}_{k+1}(I - K_{k+1}C)^T + K_{k+1}\Sigma_v K^T_{k+1} \\
&= \tilde{\Sigma}_{k+1} - K_{k+1}C\tilde{\Sigma}_{k+1} - \tilde{\Sigma}_{k+1}C^T K^T_{k+1} + K_{k+1}C\tilde{\Sigma}_{k+1}C^T K^T_{k+1} + K_{k+1}\Sigma_v K^T_{k+1}.
\end{aligned}
$$

Izvod Kalmanovog filtra

3 Filtriranje: $x_{k+1} = \tilde{x}_{k+1} + K_{k+1}(y_{k+1}^{\text{true}} - \tilde{y}_{k+1}), \quad \mathbb{E}[\|x_{k+1} - \mu_{k+1}\|^2] \to \min.$

Očekivanje: $\mu_{k+1} = \tilde{\mu}_{k+1} + K_{k+1} e_{k+1}^{y}.$

Matrica kovarijacije:
$\Sigma_{k+1} = \tilde{\Sigma}_{k+1} - K_{k+1} C \tilde{\Sigma}_{k+1} - \tilde{\Sigma}_{k+1} C^T K_{k+1}^T + K_{k+1} C \tilde{\Sigma}_{k+1} C^T K_{k+1}^T + K_{k+1} \Sigma_v K_{k+1}^T.$

Cilj optimizacije:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\|x_{k+1} - \mu_{k+1}\|^2] &= \mathbb{E}[(x_{k+1} - \mu_{k+1})^T (x_{k+1} - \mu_{k+1})] \\
&= \mathbb{E}[\operatorname{trace}((x_{k+1} - \mu_{k+1})^T (x_{k+1} - \mu_{k+1}))] \\
&= \mathbb{E}[\operatorname{trace}((x_{k+1} - \mu_{k+1})(x_{k+1} - \mu_{k+1})^T)] \\
&= [\text{trag je linearna funkcija}] \\
&= \operatorname{trace} \Sigma_{k+1} \to \min .
\end{aligned}$$

Izvod Kalmanovog filtra

3. Filtriranje: $x_{k+1} = \tilde{x}_{k+1} + K_{k+1}(y^{\text{true}}_{k+1} - \tilde{y}_{k+1})$, $\quad \mathbb{E}[\|x_{k+1} - \mu_{k+1}\|^2] \to \min$.

Cilj optimizacije: $\min\limits_{K_{k+1}} \operatorname{trace} \Sigma_{k+1}$.

Trebat će izračunati $\frac{\partial \operatorname{trace} \Sigma_{k+1}}{\partial K_{k+1}}$. Vrijedi ($\partial_{ij}$ = derivacija po X_{ij}):

$$\frac{\partial \operatorname{trace}(AX)}{\partial X} = [\partial_{ij} \operatorname{trace}(AX)]_{ij} = [\partial_{ij} \sum_{\ell=1}^{n} (AX)_{\ell\ell}]_{ij}$$

$$= [\partial_{ij} \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{\ell k} X_{k\ell}]_{ij} = [A_{ji}]_{ij} = A^T,$$

$$\frac{\partial \operatorname{trace}(XA)}{\partial X} = A^T,$$

$$\frac{\partial \operatorname{trace}(AX^T)}{\partial X} = \frac{\partial \operatorname{trace}(XA^T)}{\partial X} = A,$$

$$\frac{\partial \operatorname{trace}(XAX^T)}{\partial X} = 2XA, \ \ A \text{ simetrična}.$$

Vidi i Wikipedia: Matrix calculus.

Izvod Kalmanovog filtra

3. Filtriranje: $x_{k+1} = \tilde{x}_{k+1} + K_{k+1}(y_{k+1}^{\text{true}} - \tilde{y}_{k+1}), \quad \mathbb{E}[\|x_{k+1} - \mu_{k+1}\|^2] \to \min.$

Matrica kovarijacije:
$$\Sigma_{k+1} = \tilde{\Sigma}_{k+1} - K_{k+1}C\tilde{\Sigma}_{k+1} - \tilde{\Sigma}_{k+1}C^T K_{k+1}^T + K_{k+1}C\tilde{\Sigma}_{k+1}C^T K_{k+1}^T + K_{k+1}\Sigma_v K_{k+1}^T.$$

Imamo:
$$\begin{aligned}\frac{\partial \operatorname{trace} \Sigma_{k+1}}{\partial K_{k+1}} &= -\tilde{\Sigma}_{k+1}C^T - \tilde{\Sigma}_{k+1}C^T + 2K_{k+1}C\tilde{\Sigma}_{k+1}C^T + 2K_{k+1}\Sigma_v \\ &= -2\tilde{\Sigma}_{k+1}C^T + 2K_{k+1}(C\tilde{\Sigma}_{k+1}C^T + \Sigma_v) \\ &= 0,\end{aligned}$$

pa slijedi
$$K_{k+1} = \tilde{\Sigma}_{k+1}C^T(C\tilde{\Sigma}_{k+1}C^T + \Sigma_v)^{-1}.$$

Jednostavniji izraz za matricu kovarijacije:
$$\begin{aligned}\Sigma_{k+1} &= (I - K_{k+1}C)\tilde{\Sigma}_{k+1}(I - K_{k+1}C)^T + K_{k+1}\Sigma_v K_{k+1}^T \\ &= (I - K_{k+1}C)\tilde{\Sigma}_{k+1} - (I - K_{k+1}C)\tilde{\Sigma}_{k+1}C^T K_{k+1}^T + K_{k+1}\Sigma_v K_{k+1}^T \\ &= (I - K_{k+1}C)\tilde{\Sigma}_{k+1} + \underbrace{\left(-\tilde{\Sigma}_{k+1}C^T + K_{k+1}(C\tilde{\Sigma}_{k+1}C^T + \Sigma_v)\right)}_{0} K_{k+1}^T \\ &= (I - K_{k+1}C)\tilde{\Sigma}_{k+1}.\end{aligned}$$

Kalmanov filtar za diskretne sustave

Algoritam (Kalmanov filtar za diskretne sustave)

Neka je $x_0 \sim \mathcal{N}(\mu_0, \Sigma_0)$.

for $k = 0, 1, 2, \ldots$

1. *Propagacija stanja:*

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\mu}_{k+1} &= A\mu_k + Bu_k \\ \tilde{\Sigma}_{k+1} &= A\Sigma_k A^T + F\Sigma_w F^T \end{aligned}\right\} \tilde{x}_{k+1} \sim \mathcal{N}(\tilde{\mu}_{k+1}, \tilde{\Sigma}_{k+1})$$

2. *Inkorporiranje mjerenja* y_{k+1}^{true}*:*

$$\tilde{\mu}_{k+1}^{Y} = C\tilde{\mu}_{k+1} + Du_{k+1}$$

$$e_{k+1}^{Y} = y_{k+1}^{true} - \tilde{\mu}_{k+1}^{Y}$$

$$K_{k+1} = \tilde{\Sigma}_{k+1}C^T(C\tilde{\Sigma}_{k+1}C^T + \Sigma_v)^{-1}$$

$$\left.\begin{aligned} \mu_{k+1} &= \tilde{\mu}_{k+1} + K_{k+1}e_{k+1}^{Y} \\ \Sigma_{k+1} &= (I - K_{k+1}C)\tilde{\Sigma}_{k+1} \end{aligned}\right\} x_{k+1} \sim \mathcal{N}(\mu_{k+1}, \Sigma_{k+1})$$

Stvarno stanje sustava aproksimiramo sa $x_{k+1}^{true} \approx \mu_{k+1}$.

end

KONTINUIRANI KALMANOV FILTAR

Kontinuirani Kalmanov filtar

Direktni izvod Kalmanovog filtra za kontinuirane LTI?

- Zahtijeva napredna znanja iz statistike.
- Naš izvod: diskretni KF + limes kada vremenski korak $T \to 0$.

Model stohastičkog kontinuiranog LTI:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Fw(t), \quad & w(t) &\sim \mathcal{N}(0, \Sigma_w), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + v(t), \quad & v(t) &\sim \mathcal{N}(0, \Sigma_v), \end{aligned}$$

gdje su $w(t), v(t)$ nezavisne.

Diskretna varijanta ovog sustava (za “male” T):

$$\left.\begin{array}{rcl} x_k & \approx & x(T \cdot k), \; k = 0, 1, \dots \\ \dot{x}(T \cdot k) & \approx & \frac{x_{k+1} - x_k}{T} \\ u_k & := & u(T \cdot k) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & (I + AT)x_k + BTu_k + Fw_k \\ y_k & = & Cx_k + Du_k + v_k, \\ w_k & \sim & \mathcal{N}(0, T \cdot \Sigma_w), \quad v_k \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{T}\Sigma_v). \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (I + AT)x_k + BTu_k + Fw_k, \quad & w_k &\sim \mathcal{N}(0, T \cdot \Sigma_w), \\ y_k &= Cx_k + Du_k + v_k, & v_k &\sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{T}\Sigma_v). \end{aligned}$$

Sada uvrstimo ovaj sustav u formule za diskretni KF:

1. $K_{k+1} = \tilde{\Sigma}_{k+1}C^T(C\tilde{\Sigma}_{k+1}C^T + \frac{1}{T}\Sigma_v)^{-1}$ povlači
   $\frac{1}{T}K_{k+1} = \tilde{\Sigma}_{k+1}C^T(TC\tilde{\Sigma}_{k+1}C^T + \Sigma_v)^{-1}$ pa imamo:
   $$\lim_{T\to 0}(\frac{1}{T}K_{k+1}) = \tilde{\Sigma}_{k+1}C^T\Sigma_v^{-1}, \quad \lim_{T\to 0} K_{k+1} = 0.$$
2. Matrica kovarijacije za propagaciju stanja:
   $$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_{k+1} &= (I + AT)\Sigma_k(I + AT)^T + FT\Sigma_w F^T \\ &= \Sigma_k + T(A\Sigma_k + \Sigma_k A^T + F\Sigma_w F^T) + \mathcal{O}(T^2) \\ &= \left[\text{iz prethodnog koraka: } \Sigma_k = (I - K_kC)\tilde{\Sigma}_k\right] \\ &= (I - K_kC)\tilde{\Sigma}_k + T(A(I - K_kC)\tilde{\Sigma}_k + (I - K_kC)\tilde{\Sigma}_k A^T + F\Sigma_w F^T) + \mathcal{O}(T^2). \end{aligned}$$
   Slijedi:
   $$\frac{1}{T}(\tilde{\Sigma}_{k+1} - \tilde{\Sigma}_k) = \frac{-1}{T}K_kC\tilde{\Sigma}_k + (A(I - K_kC)\tilde{\Sigma}_k + (I - K_kC)\tilde{\Sigma}_k A^T + F\Sigma_w F^T) + \mathcal{O}(T),$$
   $$\dot{\tilde{\Sigma}}_k := \lim_{T\to 0}\frac{1}{T}(\tilde{\Sigma}_{k+1} - \tilde{\Sigma}_k) = -\tilde{\Sigma}_kC^T\Sigma_v^{-1}C\tilde{\Sigma}_k + (A\tilde{\Sigma}_k + \tilde{\Sigma}_k A^T + F\Sigma_w F^T).$$

Kontinuirani Kalmanov filtar

Dakle, uz $T \to 0$, možemo definirati funkciju Σ takvu da je $\Sigma(T \cdot k) \approx \tilde{\Sigma}_k$ za koju vrijedi

$$\dot{\Sigma}(t) = -\Sigma(t) \cdot C^T \Sigma_v^{-1} C \cdot \Sigma(t) + A\Sigma(t) + \Sigma(t)A^T + F\Sigma_w F^T,$$

uz početni uvjet $\Sigma(0) = \Sigma_0$, gdje je $x(0) \sim \mathcal{N}(\mu_0, \Sigma_0)$.

Ovo je tzv. DIFERENCIJALNA RICCATIJEVA JEDNADŽBA.

- Samo Σ ovisi o t, sve ostalo su konstante.
- Očekujemo $\Sigma(t) \xrightarrow{t\to\infty}$ const, tj. da se rješenje $\Sigma(t)$ stabilizira, pa $\dot{\Sigma}(t) \xrightarrow{t\to\infty} = 0$.
- Uz $\Sigma(t) = \Sigma =$ const se gornja jednadžba svodi na
$$A\Sigma + \Sigma A^T - \Sigma \cdot C^T \Sigma_v^{-1} C \cdot \Sigma + F\Sigma_w F^T = 0.$$
- Ovo je obična algebarska Riccatijeva jednadžba s nepoznanicom Σ.

Kontinuirani Kalmanov filtar

Inkorporiranje mjerenja za diskretizirani sustav iz diskretnog KF:

$$\begin{aligned}\mu_{k+1} &= \tilde{\mu}_{k+1} + K_{k+1} e^{Y}_{k+1} \\ &= \tilde{\mu}_{k+1} + K_{k+1}(y^{\text{true}}_{k+1} - C\tilde{\mu}_{k+1} - Du_{k+1}) \\ &= (I + AT)\mu_k + BTu_k + K_{k+1}(y^{\text{true}}_{k+1} - C(I + AT)\mu_k - CBTu_k - Du_{k+1}).\end{aligned}$$

Slijedi:

$$\frac{1}{T}(\mu_{k+1} - \mu_k) = A\mu_k + Bu_k + \frac{1}{T}K_{k+1}(y^{\text{true}}_{k+1} - C\mu_k - Du_{k+1} - CT(A\mu_k + Bu_k)),$$

pa puštanjem $T \to 0$ imamo:

$$\begin{aligned}\dot{\mu}(t) &= A\mu(t) + Bu(t) + \Sigma(t)C^T\Sigma_v^{-1}(y^{\text{true}}(t) - C\mu(t) - Du(t)) \\ &= A\mu(t) + Bu(t) + K(t)(y^{\text{true}}(t) - \tilde{\mu}^Y(t)).\end{aligned}$$

Ovdje je $K(t) := \Sigma(t)C^T\Sigma_v^{-1}$ Kalmanov gain, te $\tilde{\mu}^Y(t) := C\mu(t) + Du(t)$ očekivanje vrijednosti mjerenja nakon faze propagacije.

Uoči: $K(t)$ je moguće izračunati unaprijed, prije bilo kojeg mjerenja!

Sada stanje aproksimiramo očekivanjem:

$$x^{\text{true}}(t) \approx x_{KF}(t) := \mu(x),$$

a vrijednost izlaza očekivanom vrijednosti mjerenja: $y_{KF}(t) := \tilde{\mu}^{Y}(t)$.

KONTINUIRANI KALMANOV FILTAR je dan sa:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{KF}(t) &= Ax_{KF}(t) + Bu(t) + K(t)(y^{\text{true}}(t) - y_{KF}(t)), \\ y_{KF}(t) &= Cx_{KF}(t) + Du(t). \end{aligned}$$

Ovdje je:

- $K(t) = \Sigma(t)C^T\Sigma_v^{-1}$ Kalmanov gain.
- $\Sigma(t)$ je rješenje diferencijalne Riccatijeve jednadžbe.

Najčešće u praksi uzimamo:

- $K(t) = K = \Sigma C^T \Sigma_v^{-1}$.
- $\Sigma = \text{care}(A^T, C^T, F\Sigma_w F^T, \Sigma_v)$ je rješenje algebarske Riccatijeve jednadžbe.

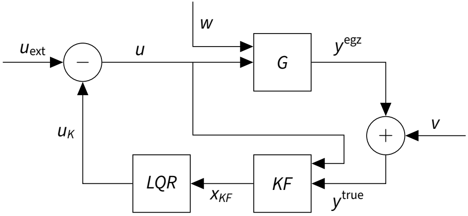
LQG kontrola

Problem linearno-kvadratično-Gaussove (LQG) kontrole:

- Želimo stabilizirati sustav za koji nemamo dostupno očitanje njegovog stanja (nego samo mjerenja izlaza) i pritom minimizirati zadani kvadratični funkcional $J(u)$.
- Mjerenja sustava su podložna Gaussovom šumu $v \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_v)$; model sustava je također stohastički s Gaussovim vanjskim smetnjama $w \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_w)$.
- Početno stanje sustava je opisano očekivanjem i matricom kovarijacije normalne distribucije: $x_0 = x_{KF}(0) \sim \mathcal{N}(\mu_0, \Sigma_0)$.

Rješenje:

1. Estimaciju stanja sustava na temelju mjerenja radimo pomoću Kalmanovog filtera.
2. Dobivenu estimaciju stanja zatim koristimo u LQR kontroli za minimizaciju $J(u)$.



Zadatak

Nastavljamo s primjerom stabilizacije invertiranog njihala pomoću LQR kontrole.
Realnija situacija:

- LQR-kontroler nema pristup svim stanjima x, nego samo nekom izlazu y
  $\rightsquigarrow$ LQR-kontroler može dobiti samo aproksimaciju stanja $\tilde{x} \approx x$ na temelju u, y.
- Kod njihala: $y(t) = [x(t), \theta(t)]^T$.
- Dodatno: šum “u modelu” $w \sim \mathcal{N}(0, 0.04I_4)$, šum u mjerenju $v \sim \mathcal{N}(0, 0.01I_2)$.
  (tj. $w(t)$ generiramo sa `w = 0.2*randn(4)`, a $v(t)$ sa `v = 0.1*randn(2)`)

1. Ugradite Luenbergerov promatrač P u sustav s dijagrama (uz zamjenu P umjesto KF):

$$\dot{x}_P(t) = (A + LC)x_P(t) + Bu(t) - Ly(t).$$

Ovdje smo pretpostavili $D = 0$ u jednadžbi sustava G.
$A + LC$ treba biti Hurwitzova $\rightsquigarrow$ smjestite joj polove u $\{-0.4, -0.5, -0.6, -0.7\}$.

Napravite simulaciju koja uključuje šum v, w:

- lsim nema tu mogućnost;
- Zbog toga sami radimo diskretizaciju LTI sustava i manualno simuliramo.

Zadatak

1. Diskretizacija LTI sustava

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Fw(t), \quad x_k \approx x(dt \cdot k), u_k, w_k$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(w), \quad y_k \approx y(dt \cdot k), v_k.$$

Uoči: $u_k = u_k^{\text{ext}} - u_k^{\text{K}}$.
Koristimo aproksimaciju derivacije podijeljenom razlikom unaprijed:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{dt} = Ax_k + Bu_k + Fw_k.$$

Diskretizirani sustav G:

$$x_{k+1} = x_k + dt \cdot (Ax_k + Bu_k + Fw_k)$$
$$y_{k+1} = Cx_{k+1} + Du_{k+1} + v_{k+1}.$$

Promatrač i kontroler daju, analogno:

$$x_{k+1}^P = x_k^P + dt \cdot ((A + LC)x_k^P + Bu_k - Ly_k)$$
$$u_{k+1}^K = K_{LQR} \cdot x_{k+1}^P.$$

Ovdje feedback K_{LQR} izračunamo s parametrima originalnog, kontinuiranog modela sustava G.

Zadatak

2. Zamijenimo Luenbergerov promatrač Kalmanovim filterom, tj. napravimo LQG kontrolu:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{KF}(t) &= Ax_{KF}(t) + Bu(t) + K(y^{\text{true}}(t) - y_{KF}(t)) \\
y_{KF}(t) &= Cx_{KF}(t) + Du(t) \\
u_K(t) &= K_{LQR}x_{KF}(t)
\end{aligned}$$

Nakon diskretizacije:

$$\begin{aligned}
x_{k+1}^{KF} &= x_k^{KF} + dt \cdot (Ax_k^{KF} + Bu_k + K(y_k^{\text{true}} - y_k^{KF})), \\
y_{k+1}^{KF} &= Cx_{k+1}^{KF} + Du_{k+1}, \\
u_{k+1}^{K} &= K_{LQR}x_{k+1}^{KF}.
\end{aligned}$$

Usporedite rezultat dobiven Luenbergerovim promatračem i Kalmanovim filterom:

- Je li sustav stabiliziran u oba slučaja?
- Kakve su performanse kontrole (koliko su “velika” stanja)?
- Koliko x_P, x_{KF} odstupaju od stvarnog stanja x?